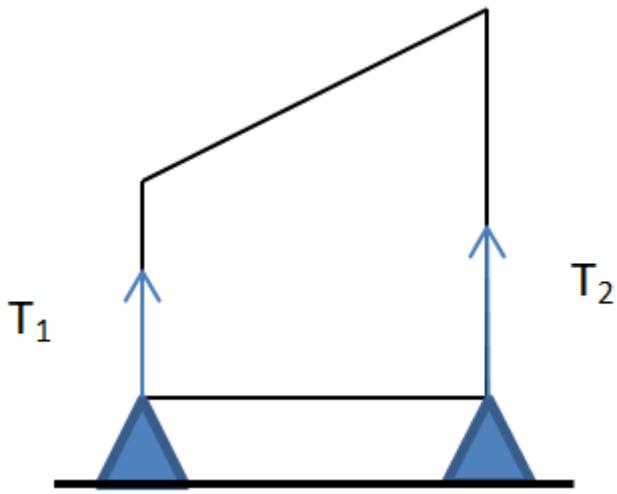


9.5. Бруск в форме прямоугольной трапеции, длины оснований которой соотносятся как 1:2, своей боковой стороной опирается на 2 опоры, расположенные на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Определить отношение сил реакций T_1/T_2 , действующих со стороны опор. Ускорение свободного падения g .



Решение.

Способ 1.

Пусть m – масса трапеции, a и $2a$ – стороны ее оснований, h – высота трапеции. Разобьем трапецию горизонтальным отрезком на 2 фигуры – прямоугольник со сторонами длиной a и h , и прямоугольный треугольник с катетами длиной a и h .

Площадь прямоугольного треугольника будет в 2 раза меньше площади прямоугольника со сторонами, равными катетам, следовательно, масса прямоугольника будет $2/3$ от массы трапеции, а масса треугольника – $1/3$ от массы трапеции.

Запишем уравнение моментов сил относительно каждой из опор. Для прямоугольника (центр масс посередине):

$$T_{1(n)} \cdot h = \frac{2}{3}mg \cdot \frac{h}{2}, \text{ или } T_{1(n)} = \frac{1}{3}mg; \quad (1)$$

$$T_{2(n)} \cdot h = \frac{2}{3}mg \cdot \frac{h}{2}, \text{ или } T_{2(n)} = \frac{1}{3}mg. \quad (2)$$

Для прямоугольного треугольника (центр масс в точке пересечения медиан, которая делит медианы как 2:1):

$$T_{1(m)} \cdot h = \frac{1}{3}mg \cdot \frac{h}{3}, \text{ или } T_{1(m)} = \frac{1}{9}mg; \quad (3)$$

$$T_{2(m)} \cdot h = \frac{1}{3}mg \cdot \frac{2h}{3}, \text{ или } T_{2(m)} = \frac{2}{9}mg. \quad (4)$$

Складывая (1) и (3), (2) и (4), получаем силы реакции опор:

$$T_1 = T_{1(n)} + T_{1(m)} = \frac{4}{9}mg; \quad (5)$$

$$T_2 = T_{2(n)} + T_{2(m)} = \frac{5}{9}mg. \quad (6)$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{4}{9}mg}{\frac{5}{9}mg} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (7)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Предложено разделение трапеции на прямоугольник и прямоугольный треугольник	2
2	Найдено соотношение площадей (или объемов, или масс) прямоугольника и прямоугольного треугольника (или их отношение к трапеции).	1
3	Записано выражение (1) для прямоугольника для момента сил для силы T_1	1
4	Записано выражение (2) для прямоугольника для момента сил для силы T_2	1
5	Записано выражение (3) для треугольника для момента сил для силы T_1	1
6	Записано выражение (4) для треугольника для момента сил для силы T_2	1
7	Найдена сила $T_1 = 4mg/9$	1
8	Найдена сила $T_2 = 5mg/9$	1
9	Найдено отношение $T_1/T_2 = 4/5 = 0,8.$	1
	Итого	10

Способ 2.

Пусть m – масса трапеции, a и $2a$ – стороны ее оснований, h – высота трапеции.

Найдем координаты центра масс трапеции. Для этого дополним ее прямоугольным треугольником с катетами a и h . Тогда дополненная фигура будет представлять собой прямоугольный треугольник с катетами $2a$ и $2h$.

Поскольку трапецию можно разбить на 3 прямоугольных треугольника со сторонами a и h , то площадь маленьких треугольников будет равна $m/3$, а площадь большого треугольника – $4m/3$.

Воспользуемся тем фактом, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, которая делит медианы в соотношении 2:1. Следовательно, центр масс большого треугольника находится на высоте $\frac{2}{3}h$, а центр верхнего маленького треугольника – на высоте $h + \frac{h}{3} = \frac{4}{3}h$.

Пусть y – высота центра масс в рассматриваемой трапеции. Тогда, по определению центра масс:

$$\frac{2}{3}h = \frac{m \cdot y + \frac{m}{3} \cdot \frac{4}{3}h}{\frac{4}{3}m}. \quad (1)$$

Сократим на m и умножим обе части уравнения на 4/3:

$$\frac{8}{9}h = y + \frac{4}{9}h; \\ y = \frac{4}{9}h. \quad (2)$$

Запишем уравнение моментов сил относительно каждой из опор.

$$T_1 \cdot h = mg \cdot y = mg \cdot \frac{4}{9}h; \quad (3)$$

$$T_2 \cdot h = mg \cdot (h - y) = mg \cdot \frac{5}{9}h. \quad (4)$$

Разделив уравнение (3) на уравнение (4), получим:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{4}{9}mg}{\frac{5}{9}mg} = \frac{4}{5} = 0,8. \quad (5)$$

Разбалловка.

№	Критерий	Баллы
1	Предложено дополнение трапеции до прямоугольного треугольника с катетами $2a$ и $2h$.	2
2	Найдены массы маленького и большого треугольников через массу трапеции.	1
3	Записано, что центр масс треугольника находится в точке пересечения медиан, которая делит медианы в соотношении 2:1.	1
4	Записано соотношение (1) для центров масс	2
5	Найдена высота центра масс трапеции $y = 4h/9$.	1
6	Записано выражение (3) для трапеции для момента сил для силы T_1	1
7	Записано выражение (4) для трапеции для момента сил для силы T_2	1
8	Найдено отношение $T_1/T_2 = 4/5 = 0,8$.	1
	Итого	10